Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Física
FIS1533 - Electricidad y Magnetismo
Profesor: Máximo Bañados
Ayudante: Alonso Ruiz (airuiz@uc.cl)

Ayudantía 14

Problema 1

El puente de Wheatstone (Figura 1), es un circuito utilizado para medir una resistencia desconocida en función de otras resistencias conocidas, que además se pueden modificar. En el centro de la configuración se coloca un galvanómetro G y se modifican las resistencias de modo que la corriente en G sea 0. Cuando el sistema esta en este estado se dice que esta balanceado.

a) Encontrar R_4 en función de las demás resistencias cuando el sistema se encuentra balanceado.

b) Se cambia la resistencia R_2 por una resistencia desconocida R y a la resistencia R_4 se le agrega una resistencia R_5 en paralelo. En esta nueva configuración el sistema queda balanceado. Cuanto vale R en función de las demás resistencias.

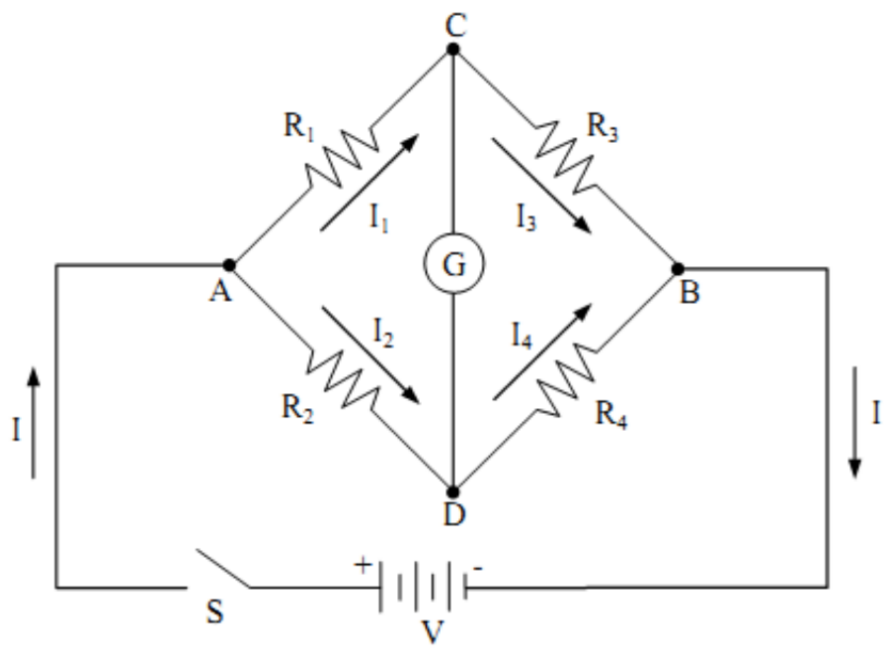

Figura 1:

Solución

a) Viendo los nodos A y D, aplicando la ley de la corriente de Kirchhoff (LCK) se tiene que:

$$c: \quad I_1 + I_g - I_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_1 = I_3 \tag{1}$$
$$d: \quad I_2 - I_g - I_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_2 = I_4 \tag{2}$$

Donde I_g es la corriente por el galvanómetro, la cual es cero porque es sistema esta balanceado. Luego por la ley de los voltajes de Kirchhoff (LVK) y usando los loops $L_1 : ADCA$ y $L_2 : DBCD$ se tiene:

$$L_1: \quad -I_gR_g + I_1R_1 - I_2R_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_1R_1 = I_2R_2 \tag{3}$$
$$L_2: \quad +I_gR_g - I_4R_4 + I_3R_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_3R_3 = I_4R_4 \tag{4}$$

Dividiendo (3) por (4) se tiene:

$$\frac{I_1R_1}{I_3R_3} = \frac{I_2R_2}{I_4R_4} \tag{5}$$

Usando (1) y (2) se encuentra que la relación entre las resistencias es:

$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4} \tag{6}$$

b) Como a R_4 se le agrega una resistencia R_5 en paralelo, hay que reducir estas a una sola resistencia dada por:

$$R_{eq} = \left[\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right]^{-1} = \frac{R_4R_5}{R_4 + R_5} \tag{7}$$

Ahora podemos aplicar la ecuación (6) porque el sistema queda balanceado, por lo tanto se tiene:

$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{R}{R_{eq}} \tag{8}$$

Esto da que la resistencia R es:

$$R = \frac{R_1R_4R_5}{R_3(R_4 + R_5)} \tag{9}$$

Problema 2

Considerando el circuito que se muestra en la figura 2 encuentre:

a) Las corrientes en el circuito.

b) La potencia con la que el sistema pierde energía.

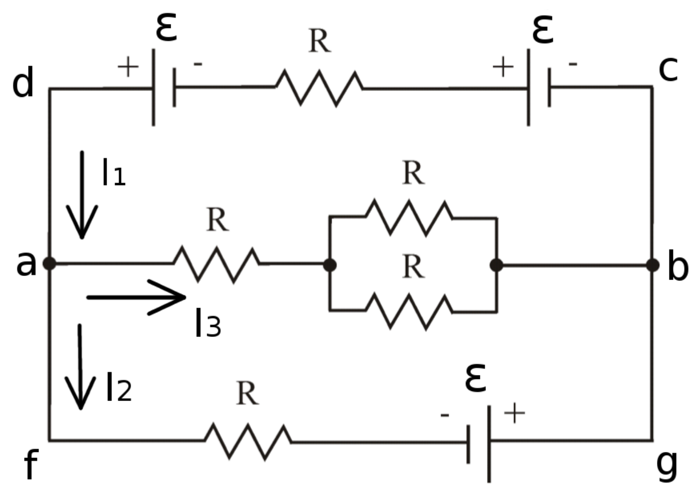

Figura 2:

Solución

a) Lo primero que hay que hacer es reducir las resistencias entre los nodos a y b a una resistencia, la cual tiene un valor de:

$$R_{eq} = R + \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right]^{-1} = \frac{3}{2}R \qquad (10)$$

Ahora tenemos que fijar las corrientes en un nodo, digamos a, tal como se ve ahora en la figura. Ahora si aplicamos las LCK al nodo a se tiene:

$$a: \quad I_1 = I_2 + I_3 \qquad (11)$$

El otro nodo que existe es el b, al cual llegan las corrientes I_2 e I_3 y sale la corriente I_1 por lo tanto no entrega información nueva. Si aplicamos la LVK con los loops $L_1 : abcda$ y $L_2 : afgba$ se tiene que:

$$L_1: \quad 2\varepsilon - \frac{3}{2}RI_3 - I_1R = 0 \qquad (12)$$

$$L_2: \quad \varepsilon + \frac{3}{2}RI_3 - I_2R = 0 \qquad (13)$$

Ahora (11), (12) y (13) forman un sistema de ecuaciones de $3x3$ para las corrientes I_1, I_2, I_3, el cual dejo como ejercicio resolverlo. Las soluciones para este son:

$$I_1 = \frac{13}{8}\frac{\varepsilon}{R} \qquad I_2 = \frac{11}{8}\frac{\varepsilon}{R} \qquad I_3 = \frac{1}{4}\frac{\varepsilon}{R} \tag{14}$$

b) La potencia total disipada va a ser la suma de las potencias disipada en cada resistencia. Por lo tanto se tiene que:

$$P = RI_1^2 + \frac{3}{2}RI_3^2 + RI_2^2 \tag{15}$$

Si se reemplazan las corrientes de (14) se obtiene que la potencia total disipada es:

$$P = \frac{296}{64}\frac{\varepsilon^2}{R} \tag{16}$$

Problema 3

Considerando el circuito que se muestra en la figura 3, encuentre todas las corrientes.

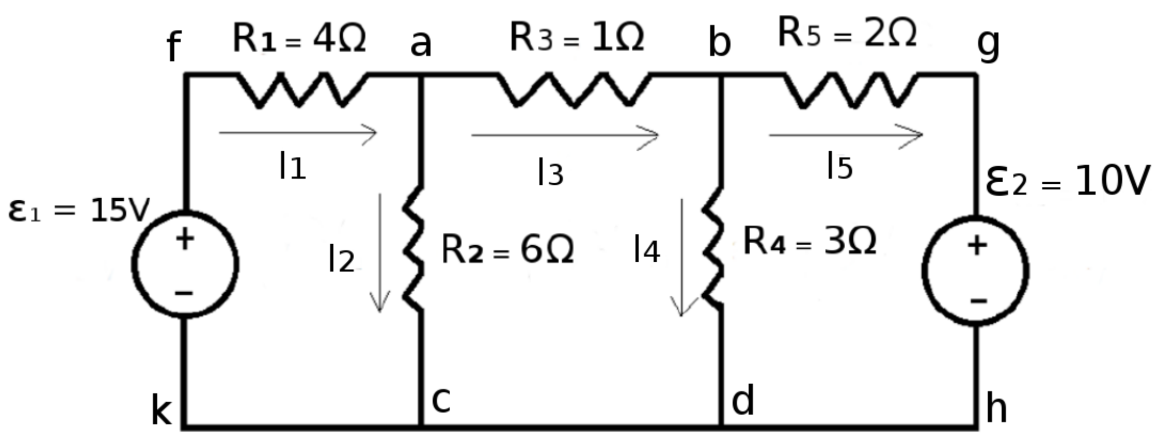

Figura 3:

Solución

Definiendo los nodos tal como se ve ahora en la figura se tiene por la LCK aplicada en los a y b que:

$$a: \quad I_1 = I_2 + I_3 \tag{17}$$
$$b: \quad I_3 = I_4 + I_5 \tag{18}$$

Ahora si aplicamos la LVK a los loops $L_1 : fackf$, $L_2 : abdca$ y $L_3 : bghdb$ se encuentran las siguientes ecuaciones:

$$L_1: \quad \varepsilon_1 - I_1R_1 - I_2R_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 4I_1 + 6I_2 = 15 \tag{19}$$
$$L_2: \quad I_2R_2 - I_3R_3 - I_4R_4 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 6I_2 + I_3 - 3I_4 = 0 \tag{20}$$
$$L_3: \quad I_4R_4 - I_5R_5 - \varepsilon_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 3I_4 - 2I_5 = 10 \tag{21}$$

Ahora se tiene un sistema de ecuaciones de $5x5$ para las corrientes, que dejo como ejercicio resolverlo. Las soluciones para las corrientes son:

$$\begin{array}{ll} I_1 = 87/46 \approx 1,89A & I_4 = 52/23 \approx 2,26A \\ I_2 = 57/46 \approx 1,24A & I_5 = -37/23 \approx -1,61A \\ I_3 = 15/23 \approx 0,65A & \end{array}$$

Notar que I_5 es negativa, esto indica que el sentido que le dimos a la corriente I_5 para resolver el sistema estaba al revés, por lo tanto al nodo b entran las corrientes I_3 e I_5 y sale la corriente I_4, en lugar de que entre I_3 y salgan I_4 e I_5.

El Sistema: Una forma de resolver el sistema de ecuaciones es combinar las ecuaciones (17) y (18) de modo que:

$$I_1 = I_2 + I_4 + I_5 \tag{22}$$

Luego se puede reemplazar (22) en las ecuaciones (19) y (20) y usar la ecuación (21) para obtener:

$$10I_2 + 4I_4 + 4I_5 = 15 \tag{23}$$
$$6I_2 - 4I_4 - I_5 = 0 \tag{24}$$
$$3I_4 - 2I_5 = 10 \tag{25}$$

Este sistema de $3x3$ es mas fácil de resolver.